Baccalauréat S

Session 2019 Métropole - Mathématiques

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau et complété par www.sujetdebac.fr. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : `tharbreteau@protonmail.com`.

Exercice n° 1 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. (**a**) Comme $-x \to_{(x\to+\infty)} -\infty$, par continuité de l'exponentielle, $e^{-x} \to_{(x\to+\infty)} 0$. De plus, $e^x \to_{(x\to+\infty)} +\infty$, donc par opérations sur les limites, $f(x) \to_{(x\to+\infty)} -\infty$.

(**b**) Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+$ donc par opérations, f l'est également, avec

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x).$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, si $x \in \mathbf{R}_+$,

$$e^{-x} - e^x < 0 \iff e^{-x} < e^x \iff 1 < e^x e^x = e^{2x}.$$

La fonction logarithme étant strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, elle conserve les inégalités strictes, d'où

$$1 < e^{2x} \iff \ln 1 < \ln e^{2x} \iff 0 < 2x \iff x > 0, \quad \text{et} \quad f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

La fonction f' est donc strictement négative sur $\mathbf{R}_+^*$ et nulle en un unique point, qui est 0, donc f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

(**c**) D'après **1.a**, $f(x) \to_{(x\to+\infty)} -\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que $f(A) < 0$. De plus, $f(0) = 7/2-(e^0+e^{-0})/2 = 7/2 > 0$ et f est continue sur $[0, A]$. Par théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $]0, A[$, donc sur $\mathbf{R}_+$, notons $\alpha > 0$ un tel point d'annulation. La stricte décroissance de f sur $\mathbf{R}_+$ démontrée en **1.b** montre l'unicité de α.

2. Remarquons que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x),$$

donc f est paire. On a donc, si $x \in \mathbf{R}_-^*$, $f(x) = 0$ si et seulement si $f(-x) = 0$, mais $-x \in \mathbf{R}_+$. D'après **1.c**, f s'annule en α uniquement sur $\mathbf{R}_+$, donc $f(x) = 0$ si et seulement si $-x = \alpha$, si et seulement si $x = -\alpha$. Ainsi, $-\alpha < 0$ est l'unique point d'annulation de f sur $\mathbf{R}_-^*$. La fonction f s'annule donc une unique fois sur $\mathbf{R}_+$ et une unique fois sur $\mathbf{R}_-^*$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qui sont α et $-\alpha$, donc qui sont opposées.

Partie B

1. *Remarque : On a montré en **Partie A, 2** que f était paire, ce qui se traduit bien par une symétrie de son graphe par rapport à l'axe des ordonnées.*

Remarque bis : La hauteur n'est pas proprement définie par l'énoncé. On peut soit l'interpréter comme la différence entre le maximum et le minimum de f sur $[-\alpha, \alpha]$, soit comme ce que semble indiquer le dessin, à savoir la valeur de $f(0)$. Les deux seraient sans doutes acceptés, à condition d'expliquer sur sa copie quelle définition on utilise.

Définissons la hauteur h d'un arceau comme la différence entre le maximum et le minimum de f sur $[-\alpha, \alpha]$. On a montré en **Partie A, b** que f était strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Comme elle est paire, elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}_-$, donc elle atteint son maximum en 0, et son minimum est 0, atteint en α et $-\alpha$. On a donc $h = f(0) - 0 = 7/2 - (e^0 + e^{-0})/2 = 7/2 - 2/2 = 5/2 = 2,5\text{m}$.

2. (**a**) De même qu'en **Partie A, 1.b**, on montre que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}),$$

d'où

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 1+(f'(x))^2 = 1+\frac{1}{2^2}(e^{-x}-e^{x})^2 = \frac{4}{4}+\frac{1}{4}((e^{-x})^2-2e^{-x}e^{x}+(e^{x})^2) = \frac{1}{4}((e^{-x})^2+2+(e^{x})^2) = \frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2.$$

(**b**) D'après **2.a**,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2} = \frac{1}{2}|e^{x}+e^{-x}| = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}),$$

car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbf{R}$. Par conséquent,

$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1+(f'(x))^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^{x}+(-e^{-x})\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}((e^{\alpha}-e^{0})-(e^{-\alpha}-e^{0})) = \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}).$$

Mais on a montré en **Partie A, 2** que f est paire, donc la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[-\alpha, 0]$ est égale à celle sur $[0, \alpha]$, qui vaut I. On en déduit que la longueur d'un arceau est égale à $2I$, c'est-à-dire à $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

Partie C

1. La quantité $\mathcal{A}_N$ de bâche nécéssaire pour recouvrir la façade nord est égale à l'aire délimitée par un arceau et le sol, donc à l'aire sous la courbe représentative de f entre $-\alpha$ et α. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_N = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

Mais d'après **Partie A, 2**, f est paire donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

De plus, la quantité $\mathcal{A}_S$ de bâche nécéssaire pour recouvrir la façade sud est la même que celle pour la façade nord, moins l'aire de l'ouverture, égale à $1 \times 2 = 2\mathrm{m}^2$. Ainsi, $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_N - 2$, et

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_N + \mathcal{A}_S = 2\mathcal{A}_N - 2 = 2\times 2\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2 = 4\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2.$$

2. *Remarque : Une valeur approchée de α peut-être trouvée par dichotomie.*
D'après **1**,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2 &= 4\int_0^{\alpha}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right)\mathrm{d}x - 2\\
&= 4\left[\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\right]_0^{\alpha} - 2\\
&= 4\left[\frac{7}{2}\alpha-\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{0}-(e^{-\alpha}-e^{0}))\right] - 2\\
&= 4\left[\frac{7}{2}\alpha-\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})\right] - 2\\
&= 14\alpha - 2(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2.
\end{aligned}$$

De plus, la distance délimitée entre le premier et le dernier arceau est $3 \times 1,5 = 4,5$m et la longueur d'un arceau est, d'après **2.b**, $I = e^{\alpha} - e^{-\alpha}$. La bâche recouvrant le dessus de la serre est donc un rectangle de côtés I et $4,5$, donc d'aire $\mathcal{A}_D = 4,5I = 4,5(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$. La quantité totale de bâche $\mathcal{A}_T$ nécessaire pour réaliser cette serre est donc

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + \mathcal{A}_D = 14\alpha - 2(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2 + 4,5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) = 14\alpha + 2,5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2 \simeq 42\mathrm{m}^2.$$

Remarque : Le résultat était prévisible, 42 étant la réponse à la grande question sur la vie, l'univers et le reste. Les lecteurs d'H2G2 comprendront.

Exercice n° 2 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. (**a**) La variable aléatoire X_A suit une loi uniforme sur $[9, 25]$, donc $\mathbf{E}(X_A) = (25 + 9)/2 = 34/2 = 17$. La durée moyenne d'une partie de type A est 17min.

(**b**) La variable aléatoire X_B suit une loi normale, donc son espérance est égale à l'abscisse du point au sommet de la courbe en cloche qui est la représentation de sa fonction de densité, représentée sur le graphique. On peut y lire $\mathbf{E}(X_B) \simeq 17$, donc la durée moyenne d'une partie de type B est 17min.

2. Notons X la variable aléatoire modélisant le choix d'un type de jeu. X prend la valeur A avec une probabilité $0,5$ et la valeur B avec la même probabilité. Notons T la variable aléatoire modélisant la durée d'une partie. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(T < 20) = \mathbf{P}(T < 20, X = A) + \mathbf{P}(T < 20, X = B) = \mathbf{P}(X_A < 20, X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20, X = B).$$

Les variables aléatoires X, X_A et X_B étant indépendantes,

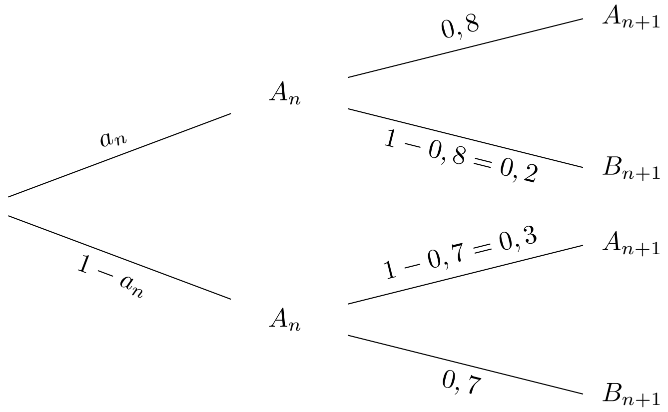
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_A < 20, X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20, X = B) &= \mathbf{P}(X_A < 20)\mathbf{P}(X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20)\mathbf{P}(X = B) \\ &= 0,5[\mathbf{P}(X_A < 20) + \mathbf{P}(X_B < 20)].\end{aligned}$$

La variable aléatoire X_A suivant une loi uniforme sur $[9, 25]$, $\mathbf{P}(X_A < 20) = (20 - 9)/(25 - 9) = 0,6875$. La variable aléatoire X_B suivant une loi normale de moyenne $\mu = 17$ d'après **1.b**, et d'écart type 3 donc $\mathbf{P}(X_B < 20)$ s'obtient à l'aide de la calculatrice et a pour résultat 0,8413. On en déduit que

$$\mathbf{P}(T < 20) = 0,5(0,6875 + 0,8413) \simeq 0,76.$$

Partie B

1. (**a**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, les données de l'énoncé permettent de construire l'arbre de probabilités suivant :



(**b**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbf{P}(B_n),$$

donc l'arbre construit en **1.a** montre que $\mathbf{P}(A_{n+1}) = 0,8\mathbf{P}(A_n) + 0,3\mathbf{P}(B_n)$, soit

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3(1 - a_n) = 0,5a_n + 0,3.$$

2. (**a**) Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(H_n) : 0 \leq a_n \leq 0,6$.

- Initialisation : Comme $a_1 = a = 0,5$, (H_1) est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que (H_n) soit vraie. D'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ mais d'après (H_n), $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0,3 \leq 0,5a_n + 0,3 \leq 0,5 \times 0,6 + 0,3$, soit $0 \leq a_{+1} \leq 0,6$, d'où (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq a_n \leq 0,6$.

(**b**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ donc $a_{n+1} - a_n = -0,5a_n + 0,3$. Mais d'après **2.a**, $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0 \geq -0,5a_n \geq -0,5 \times 0,6 = -0,3$, d'où $a_{n+1} - a_n \geq -0,3 + 0,3 = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} \geq a_n$, donc que la suite (a_n) est croissante.

(**c**) D'après **2.b**, (a_n) est croissante et d'après **2.a**, elle est majorée, donc elle converge. Notons l sa limite, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$, l vérifie

$$l = 0,5l + 0,3, \quad \text{donc} \quad 0,5l = 0,3, \quad \text{soit} \quad l = 0,6.$$

3. (**a**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n+0,3$, donc $a_{n+1}-0,6 = 0,5a_n+0,3-0,6 = 0,5a_n-0,3 = 0,5(a_n-0,6)$, donc $u_{n+1} = 0,5u_n$. La suite (u_n) est donc bien géométrique, de raison $0,5$.

(**b**) D'après **3.a**, (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = (a-0,6) \times 0,5^{n-1},$$

donc par définition de (u_n),

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = (a-0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$

(**c**) Comme $-1 < 0,5 < 1$, la suite géométrique de raison $0,25$ a une limite nulle, donc pas opérations sur les limites, $a_n \to_{(n\to+\infty)} 0,6$. Cette limite est indépendante de la valeur de a.

(**d**) Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n + b_n = 1$, $b_n = 1 - a_n$, mais d'après **3.c**, $a_n \to_{(n\to+\infty)} 0,6$ donc par opérations sur les limites, $b_n \to_{(n\to+\infty)} 0,4$. On bout d'un certain nombre de parties, la probabilité de faire une partie A est plus grande que celle de faire une partie B, donc la publicité qui sera la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéos sera celle insérée en début des parties de type A.

Exercice n° 3 *Commun à tous les candidats*

1. Notons Δ le discriminant de (E),

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 \times 3 - 16 = 12 - 16 = -4 < 0.$$

L'équation (E) admet donc deux racines complexes conjuguées distinctes, que l'on note z_A et z_B, avec

$$z_A = \frac{2\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_B = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Comme z_A et z_B sont conjugués, $|z_A| = |z_B| = |\sqrt{3} + \mathrm{i}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et $OA = OB$. De plus,

$$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} + \mathrm{i} - (\sqrt{3} - \mathrm{i})| = |2\mathrm{i}| = 2,$$

donc $OA = OB = AB$, donc le triangle OAB est équilatéral, <u>l'affirmation 1 est vraie.</u>

2. Mettons u sous forme exponentielle, $|u| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, et

$$u = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2e^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

Ainsi, $u^{2019} = 2^{2019}e^{2019\mathrm{i}\pi/6}$, or $2019 = 6 \times 336 + 3$, d'où $u^{2019} = 2^{2019}e^{\mathrm{i}336\pi + \mathrm{i}\pi/2} = 2^{2019}\mathrm{i}$.
De plus, $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}\mathrm{i} + \overline{2^{2019}\mathrm{i}} = 0$. <u>L'affirmation 2 est donc fausse.</u>

3. Soit $n \geq 1$, notons $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^{-nx+1}$, définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+$. Comme $f_n = u \times v$, par opérations f_n l'est aussi et par formule de dérivation d'un produit de fonctions,

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f_n'(x) = e^{-nx+1} + x(-n)e^{-nx+1} = (1 - xn)e^{-nx+1}.$$

Si $x \in \mathbf{R}_+$, la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}_+$,

$$f_n'(x) > 0 \iff 1 - xn > 0 \iff xn < 1 \iff x < \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Pour tout entier n non nul, f_n admet bien un maximum, et ce en $1/n$. L'affirmation 3 est bien vraie.

4. Par positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |f(x)| = |\cos x| e^{-x} \leq e^{-x},$$

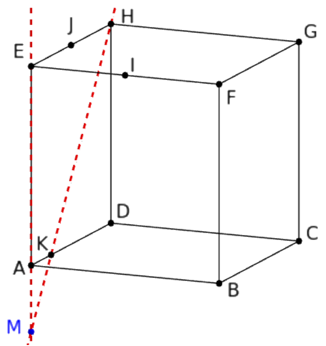
car la fonction cosinus est majorée par 1 sur $\mathbf{R}$, donc $|f(x)| \to_{(x \to +\infty)} 0$, d'où $f(x) \to_{(x \to +\infty)} 0$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $x = 0$, ce qui prouve que l'affirmation 4 est vraie.

5. Si la variable I contient la valeur 15 en fin d'algorithme, on a alors $2^{14} \leq A$ et $2^{15} > A$.
Par conséquent : $2^{14} \leq A < 2^{15}$. Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$, on obtient $\ln(2^{14}) \leq \ln(A) < \ln(2^{15})$ et donc $14\ln(2) \leq \ln(A) < 15\ln(2)$.
L'affirmation 5 est donc fausse.

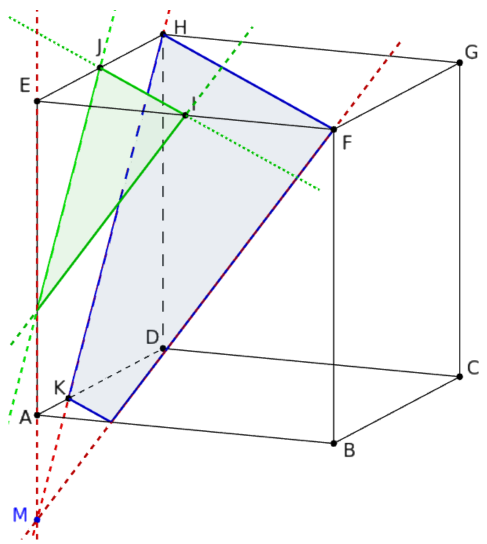
Exercice n° 4 *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Partie A

1. La droite (HK) est incluse dans le plan (FHK), donc l'intersection entre (HK) et (AE) est l'intersection entre (AE) et (FHK), car (AE) n'est pas incluse dans (FHK).



2. Le point M appartient au plan (FHK), donc la droite (FM) est incluse dans (FHK), ce qui permet de la section du cube par le plan (FHK), représentée en bleu. On trace ensuite la droite parallèle à (FH) passant par I, puis celle parallèle à (FM) passant par I, et enfin comme celle parallèle à (HK) passant par J. Ces trois droites délimitent la section du cube par le plan $\mathcal{P}$, parallèle à (FHK) et passant par I, représentée en vert.



Partie B

1. (**a**) Les coordonnées de F sont $(1;0;1)$, celles de H sont $(0;1;1)$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, donc les coordonnées de K sont $(0;1/4;0)$. On en déduit que $\overrightarrow{FH} = (0-1;1-0;1-1) = (-1;1;0)$ et que $\overrightarrow{FK} = (0-1;1/4-0;0-1) = (-1;1/4;-1)$. Ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires donc sont deux vecteurs directeurs de (FHK). De plus,

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{FH} = 4\times(-1) + 4\times 1 + (-3)\times 0 = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{FK} = 4\times(-1) + 4\times \dfrac{1}{4} + (-3)\times(-1) = -4+1+3 = 0 \end{cases},$$

donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs de (FHK), donc est normal à ce plan.

(**b**) D'après **1.a**, le vecteur $\overrightarrow{n}(4;4;-3)$ est normal à (FHK) donc une équation cartésienne de ce plan est de la forme

$$4x + 4y - 3z + a = 0,$$

où a est un réel à déterminer. Le point $F(1;0;1)$ appartient à (FHK) donc a vérifie

$$4\times 1 + 4\times 0 - 3\times 1 + a = 0, \quad \text{soit} \quad a = -1.$$

Une équation cartésienne de (FHK) est donc $4x+4y-3z-1=0$.

(**c**) Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à (FHK) donc tout vecteur orthogonal à (FHK) est orthogonal à $\mathcal{P}$. En particulier, $\overrightarrow{n}(4;4;-3)$ est orthogonal à (FHK) d'après **1.a**, donc à $\mathcal{P}$. Une équation cartésienne de ce plan est de la forme

$$4x + 4y - 3z + b = 0,$$

où b est un réel à déterminer. Le point I appartient à $\mathcal{P}$ et est le milieu du segment $[EF]$, donc ses coordonnées sont $((0+1)/2;(0+0)/2;(1+1)/2) = (1/2;0;1)$. Ainsi, b vérifie

$$4\times\frac{1}{2} + 4\times 0 - 3\times 1 + b = 0, \quad \text{soit} \quad b = 1.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $4x+4y-3z+1=0$.

(**d**) Un vecteur directeur de (AE) est $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$ et $A(0;0;0)$ est sur (AE), donc une équation paramétrique de cette droite est

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

Soit M' un point de l'espace, notons $(x;y;z)$ ses coordonnées. D'après la représentation paramétrique de (AE) et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ établie en **1.d**,

$$M' \in (AE)\cap\mathcal{P} \iff \exists t\in\mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (0;0;t) \\ 4x+4y-3z+1 = 0 \end{cases} \iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = y = 0 \\ z = t \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Il existe donc un unique point d'intersection M' entre (AE) et $\mathcal{P}$, de coordonnées $(0;0;1/3)$.

2. (**a**) La droite Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc tout vecteur normal à ce plan est un vecteur directeur de cette droite. En particulier, on a montré en **1.c** que le vecteur $\overrightarrow{n}(4;4;-3)$ est normal à $\mathcal{P}$, donc est un vecteur directeur de Δ. Le point $E(0;0;1)$ appartenant à Δ, une représentation paramétrique de cette droite est

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \\ z = -3t+1 \end{cases}.$$

(**b**) Le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ étant orthonormé, $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal aux deux autres vecteurs, qui sont des vecteurs directeurs de (ABC). Ainsi, $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$ est un vecteur normal à (ABC). Une équation cartésienne de ce plan est donc de la forme

$$z + c = 0,$$

où c est un réel à déterminer. Le point $A(0;0;0)$ appartient à (ABC) donc c vérifie

$$0 + c = 0, \quad \text{soit} \quad c = 0.$$

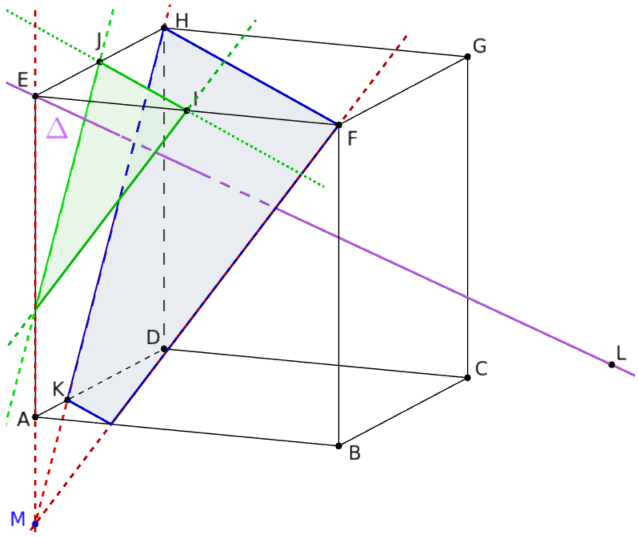
Une équation cartésienne de (ABC) est donc $z = 0$.

Soit L un point de l'espace, notons $(x;y;z)$ ses coordonnées. D'après la représentation paramétrique de Δ établie en **2.a**, et l'équation cartésienne de (ABC),

$$\begin{aligned} L \in \Delta \cap (ABC) &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (4t;4t;-3t+1) \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x = y = 4t \\ z = -3t+1 \\ -3t+1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x = y = 4t \\ z = -3t+1 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Il existe donc un unique point d'intersection L entre Δ et (ABC), de coordonnées $(4/3;4/3;0)$.

(**c**) On place le point L, puis on trace $\Delta = (EL)$, représentée en violet.



(**d**) Le vecteur $\overrightarrow{BF} = (1-1;0-0,1-0) = (0;0;1)$ est un vecteur directeur de la droite (BF), et $B(1;0;0) \in (BF)$, donc une représentation paramétrique de (BF) est

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

Soit T un point de l'espace, notons $(x;y;z)$ ses coordonnées. D'après la représentation paramétrique de Δ établie en **2.a**, et celle de (BF),

$$\begin{aligned} T \in \Delta \cap (BF) &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (4t;4t;-3t+1) \\ (x;y;z) = (1;0;t') \end{cases} \\ &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (1;0;t') \\ 4t = 1 \\ 4t = 0 \\ -3t+1 = t' \end{cases} \\ &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (1;0;t') \\ t = 1 \\ t = 0 \\ -3t+1 = t' \end{cases}. \end{aligned}$$

C'est impossible car $1 \neq 0$, donc les droites Δ et (BF) ne sont pas sécantes.

Le vecteur $\overrightarrow{CG} = (1-1; 1-1, 1-0) = (0; 0; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (CG), et $C(1;1;0) \in (CG)$, donc une représentation paramétrique de (CG) est

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} .$$

Soit T' un point de l'espace, notons $(x; y; z)$ ses coordonnées. D'après la représentation paramétrique de Δ établie en **2.a**, et celle de (CG),

$$\begin{aligned} T' \in \Delta \cap (CG) &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (4t; 4t; -3t+1) \\ (x;y;z) = (1;1;t') \end{cases} \\ &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (1;1;t') \\ 4t = 1 \\ -3t + 1 = t' \end{cases} \\ &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (1;1;t') \\ t = \dfrac{1}{4} \\ t' = \dfrac{1}{4} \end{cases} . \end{aligned}$$

Les droites Δ et (CG) sont donc sécantes en $(1; 1; 1/4)$.